

# Construcción y Control de un Péndulo Invertido utilizando la Plataforma Lego MINDSTORMS NXT

Ing. Héctor Sánchez, Ph.D. Iñaki Aguirre, Ph.D. Anna Patete

**Resumen**—Se propone realizar la construcción de un péndulo invertido sobre dos ruedas utilizando la plataforma Lego Mindstorms NXT®. Se elabora un modelo matemático del prototipo construido utilizando el método de Lagrange, y se diseña una ley de control para el modelo propuesto. Las simulaciones se realizan utilizando el programa Mathematica®. Para la implementación se programa la ley de control diseñada en el bloque inteligente NXT, utilizando la herramienta de desarrollo de aplicaciones RobotC, con el objetivo de lograr el control del péndulo en la posición vertical.

**Palabras claves**—Control, modelado, péndulo invertido, plataforma lego mindstorms NXT®.

## I. INTRODUCCIÓN

Los péndulos invertidos constituyen un banco de pruebas completo e interesante para la ingeniería de control. Uno de los más estudiados de esta familia de artefactos es el denominado péndulo invertido sobre un vehículo.

Este consiste en un péndulo o varilla que gira libremente por uno de sus extremos mediante una articulación situada sobre un vehículo o sistema móvil, que se mueve sobre una guía rectilínea horizontal bajo la acción de una fuerza  $F$ . Esta fuerza es la acción de control con la que se pretende actuar sobre la posición de la varilla [1].

El péndulo invertido es un sistema inestable, ya que puede caer en cualquier momento a menos de que se aplique una fuerza de control adecuada [2].

Desde antes de los años 70 se han realizado varios proyectos con péndulos invertidos. Un investigador líder en esta área es el Profesor Furuta (ver [3]), quien desde entonces ha realizado notables aportes teóricos y experimentales concernientes a este problema de control.

En este trabajo se va a realizar la construcción del péndulo invertido sobre dos ruedas utilizando la plataforma Lego Mindstorms NXT® mostrado en la Fig. 1, en el cual, el problema de control consiste en mantener el péndulo en la posición vertical. Una vez construido el péndulo invertido sobre dos ruedas, se realiza un modelo matemático del mismo

de forma de diseñar una ley de control a implementar en el Lego Mindstorms NXT®, que establezca el péndulo.

A continuación, se hace una breve reseña de varios proyectos de péndulos invertidos sobre dos ruedas realizados o construidos hasta los momentos.

Los investigadores Grasser et al., (2002) del Laboratorio de Electrónica Industrial del *Swiss Federal Institute of Technology* (EPFL), construyeron un prototipo de un vehículo de dos ruedas basado en un péndulo invertido llamado Joe, al cual le colocaron pesos en la varilla del péndulo para simular el peso de un ser humano en baja escala [4]. Sherman (2003), construyó el péndulo invertido sobre dos ruedas llamado Balibot [5]. Anderson (2003), construyó un robot de balanceo sobre dos ruedas denominado nBot [6]. Ooi (2003), como proyecto de final de carrera en la escuela de Ingeniería Mecánica de la Universidad de Western Australia, realizó la construcción de un péndulo invertido sobre dos ruedas [7].

También se han construido péndulos invertidos sobre dos ruedas utilizando la plataforma Lego Mindstorms®, los cuales fueron tomados como punto de referencia para la realización de este trabajo: Hassenplug (2002), construyó un robot péndulo invertido sobre dos ruedas llamado Legway [8]. Hurbain's (2007), construyó el NXTway [9]. Watanabe (2007), de la Universidad de Waseda en Japón, construyó el NXTway-G [10]. Yamamoto (2008), construyó el NXTway-GS, el cual balancea y además desplaza el robot con la utilización de un control remoto [11].

## II. CONSTRUCCIÓN DEL PÉNDULO INVERTIDO SOBRE DOS RUEDAS

En esta sección se muestra el péndulo invertido sobre dos ruedas construido utilizando las piezas Lego Technic®, mostrado en la Fig. 1. Se tomó como plano inicial de construcción el propuesto por Yamamoto (ver [11]). A su vez se describen brevemente el controlador, el sensor y los actuadores que constituyen este sistema de control.

### A. Controlador

El bloque programable NXT el cual contiene un microcontrolador ARM7 de 32 bits con memoria *flash* es el elemento que contiene y ejecuta los programas realizados en un computador, y éstos permiten que un robot Mindstorms® se mueva y pueda realizar diferentes operaciones [12].

Artículo recibido el 17 de Enero de 2010.

H.S., I.A. y A.P. están con la Universidad de Los Andes, Sector La Hechicera, Facultad de Ingeniería, Escuela de Ingeniería de Sistemas, Departamento de Sistemas de Control, Mérida, Estado Mérida, Venezuela, Tlf.: 58-274-2402986, Fax: 58-274-2402847, E-mail: sanchezhe@hotmail.com, iaguirre@ula.ve, apatete@ula.ve.



FIG. 1. Péndulo invertido sobre dos ruedas.

### B. Sensor

El sensor giroscópico NXT Gyro de Hitechnic® detecta velocidad angular y retorna un valor que representa el número de grados de rotación por segundo, de la misma forma que indica la dirección de rotación. El sensor Gyro puede medir rotación en una escala de  $\pm 360^\circ$ . Con él se pueden construir y controlar robots que se pueden balancear, donde la medición de la rotación es esencial [13].

### C. Actuadores

Los servomotores de corriente DC están contruidos en base a una gran cantidad de engranajes internos. Éstos pueden rotar hasta alcanzar 170 rpm (revoluciones por minuto), trabajan en un rango de -9V a +9V y tienen un peso de 80 g (ver [9]).

## III. MODELADO DEL SISTEMA FÍSICO

En esta sección se presenta el modelado del sistema físico y se toma como referencia el modelo utilizado por Yamamoto (ver [11]). Una vez obtenido el modelo del sistema continuo se realiza la discretización del mismo, con el cual se diseña una ley de control discreta que se pueda programar en el Lego Mindstorms NXT®.

En la Fig. 2, se muestra la vista lateral y el sistema de coordenadas sobre el cual se elabora el modelo matemático para el péndulo invertido sobre dos ruedas.

En la Tabla I se muestran los parámetros físicos del sistema, con sus respectivas unidades y descripción.

Para obtener las ecuaciones de movimiento de Lagrange es necesario definir las coordenadas generalizadas del sistema, así como el lagrangiano.

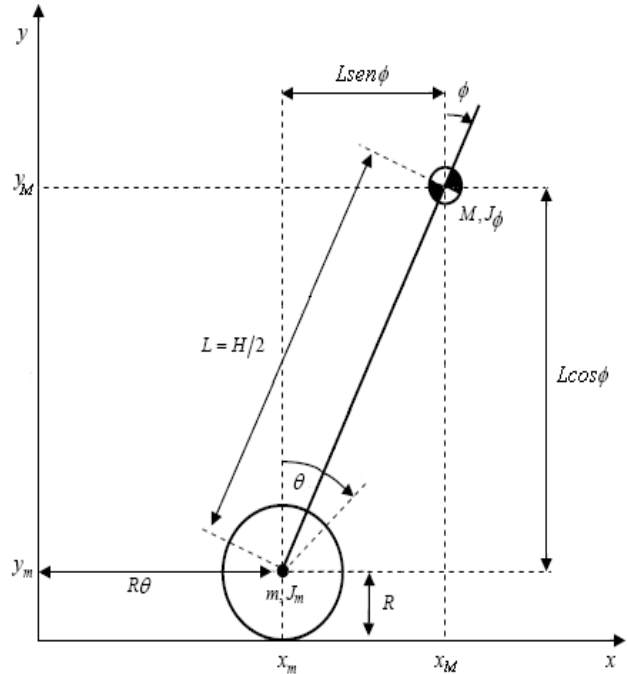
Las coordenadas generalizadas del sistema son:

- $\theta$ : Ángulo de rotación de las ruedas,
- $\phi$ : Ángulo de inclinación del cuerpo del péndulo,
- $(x_i, y_i)$ : Posición de la rueda izquierda,
- $(x_d, y_d)$ : Posición de la rueda derecha,
- $(x_M, y_M)$ : Posición del péndulo invertido.

El sistema de coordenadas bidimensional sobre el cual se elabora el modelo se describe a continuación.

Para la rueda izquierda:

$$(x_i, y_i) = (x_m, y_m) = (R\theta, R). \quad (1)$$



$\theta$ : Ángulo de rotación de las ruedas  $\phi$ : Ángulo de inclinación del cuerpo del péndulo

FIG. 2. Vista lateral del péndulo invertido sobre dos ruedas.

TABLA I  
PARÁMETROS FÍSICOS DEL SISTEMA.

$g$	aceleración de la gravedad	9,81 m/s <sup>2</sup>
$m$	masa de la rueda	0,03 kg
$R$	radio de las ruedas	0,04 m
$J_m$	momento de inercia de las ruedas	$\frac{MR^2}{2}$ kg m <sup>2</sup>
$M$	masa del cuerpo del péndulo	0,6 kg
$H$	altura del cuerpo del péndulo	0,144 m
$L$	distancia del centro de masa al eje de las ruedas	$\frac{H}{2}$ m
$J_\phi$	momento de inercia del péndulo	$\frac{ML^2}{3}$ kg m <sup>2</sup>
$j_m$	momento de inercia del motor DC	10 <sup>-5</sup> kg m <sup>2</sup>

Para la rueda derecha:

$$(x_d, y_d) = (x_m, y_m) = (R\theta, R). \quad (2)$$

La posición del péndulo invertido dada por  $(x_M, y_M)$  está vinculada con la posición de sus ruedas, por lo tanto  $x_i = x_d = x_m$  e  $y_i = y_d = y_m$ .

$$(x_M, y_M) = (x_m + L \sin \phi, y_m + L \cos \phi) = (R\theta + L \sin \phi, RL \cos \phi). \quad (3)$$

La energía cinética traslacional es:

$$T_1 = \frac{1}{2} m \dot{x}_i^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_d^2 + \frac{1}{2} M \dot{y}_M^2 + \frac{1}{2} M \dot{y}_M^2, \quad (4)$$

$$T_1 = \frac{1}{2} R \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} R \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M (R \dot{\theta} + L \dot{\phi} \cos \phi)^2 + \frac{1}{2} M (L(-\sin \phi) \dot{\phi})^2. \quad (5)$$

La energía cinética rotacional es:

$$T_2 = \frac{1}{2} J_m \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} J_m \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} J_\phi \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} M \dot{y}_M^2. \quad (6)$$

La energía potencial es:

$$U = mgy_m + mgy_m + Mgy_M, \quad (7)$$

$$U = 2mgR + Mg(R + L \cos \phi). \quad (8)$$

Por lo tanto el lagrangiano es:

$$Lag = T_1 + T_2 - U, \quad (9)$$

donde:

$$Lag = R \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M (R \dot{\theta} + L \dot{\phi} \cos \phi)^2 + \frac{1}{2} M (L(-\sin \phi) \dot{\phi})^2 + J_m \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} J_\phi \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} M \dot{y}_M^2 - 2mgR - Mg(R + L \cos \phi). \quad (10)$$

Las ecuaciones de Lagrange son:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial Lag}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial Lag}{\partial \theta} = F_\theta \quad (11)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial Lag}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial Lag}{\partial \phi} = F_\phi \quad (12)$$

Aplicando (11) y (12) a (10) se obtienen las ecuaciones de movimiento de Lagrange para el péndulo invertido sobre dos ruedas.

$$\begin{cases} [(2m+M)R^2 + 2J_m] \ddot{\theta} + (MLR \cos \phi) \ddot{\phi} \\ - MLR \dot{\phi}^2 \sin \phi = F_\theta, \\ (MLR \cos \phi) \ddot{\theta} + (ML^2 + J_\phi) \ddot{\phi} \\ - MgL \sin \phi = F_\phi. \end{cases} \quad (13)$$

$$(14)$$

Tomando como referencia el modelado del péndulo invertido sobre un carro, realizado por Ogata (ver [14]), se tomó como fuerza externa el voltaje aplicado a las ruedas, el cual es la señal de control  $u$ .

Con estas modificaciones las ecuaciones de movimiento de Lagrange, para el péndulo invertido sobre dos ruedas, son:

$$\begin{cases} [(2m+M)R^2 + 2J_m] \ddot{\theta} + (MLR \cos \phi) \ddot{\phi} \\ - MLR \dot{\phi}^2 \sin \phi = u, \\ (MLR \cos \phi) \ddot{\theta} + (ML^2 + J_\phi) \ddot{\phi} \\ - MgL \sin \phi = 0. \end{cases} \quad (15)$$

$$(16)$$

Despejando  $\ddot{\theta}$  y  $\ddot{\phi}$  de (15) y (16) se obtiene:

$$\ddot{\theta} = \frac{(ML^2 + J_\phi)(u + MLR \sin \phi \dot{\phi}^2 - (ML)^2 Rg \sin \phi \cos \phi)}{[(2m+M)R^2 + 2J_m](ML^2 + J_\phi) - (MLR \cos \phi)^2},$$

$$\ddot{\phi} = \frac{-(MLR \cos \phi)(u + MLR \dot{\phi}^2 \sin \phi) + MgL \sin \phi [(2m+M)R^2 + 2J_m]}{[(2m+M)R^2 + 2J_m](ML^2 + J_\phi) - (MLR \cos \phi)^2}. \quad (17)$$

Sean las variables de estado:

$$\begin{aligned} x_1 &= \phi \\ x_2 &= \dot{\phi} \\ x_3 &= \theta \\ x_4 &= \dot{\theta} \end{aligned} \quad (18)$$

y escribiendo las ecuaciones del sistema no lineal en variables de estado, se tiene la siguiente representación de primer orden:

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (19)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{-(MLR \cos x_1)(u + MLR x_2^2 \sin x_1) + MgL \sin x_1}{(ML^2 + J_\phi) - \frac{(MLR \cos x_1)^2}{[(2m+M)R^2 + 2J_m]}} \quad (20)$$

$$\dot{x}_3 = x_4 \quad (21)$$

$$\dot{x}_4 = \frac{(ML^2 + J_\phi)(u + MLR \sin x_1 x_2^2) - (ML)^2 Rg \sin x_1 \cos x_1}{[(2m+M)R^2 + 2J_m](ML^2 + J_\phi) - (MLR \cos x_1)^2} \quad (22)$$

De manera similar a lo realizado en el proyecto de grado de Patete (ver [15]), se observa que la dinámica de este sistema puede ser pensada como constituida por dos bloques en cascada, como se muestra en la Fig. 3. Las variables  $\dot{x}_1$  y  $\dot{x}_2$  que son respectivamente la velocidad y la aceleración del

cuerpo del péndulo invertido sobre dos ruedas, representan la dinámica de la planta y las variables  $\dot{x}_3$  y  $\dot{x}_4$  que son la velocidad y la aceleración de las ruedas, representan la dinámica de control.

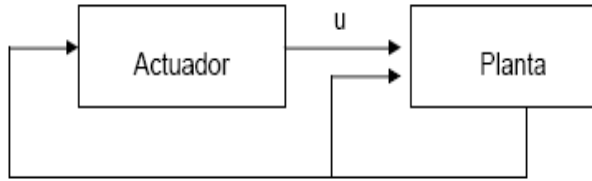


FIG. 3. Diagrama de bloques del sistema desacoplado.

Desacoplando el sistema se tiene que:

$$\dot{x}_4 = \ddot{x}_3. \quad (23)$$

De (22) se tiene que:

$$u = \left[ (2m + M)R^2 + 2J_m - \frac{(MLR \cos x_1)^2}{ML^2 + J_\phi} \right] \dot{x}_4 - MLR \sin x_1 (x_2)^2 + \frac{(ML)^2 Rg \sin x_1 \cos x_1}{ML^2 + J_\phi}. \quad (24)$$

Sustituyendo  $u$  de (24) en (20) y simplificando obtenemos:

$$\dot{x}_2 = \frac{-MLR \cos x_1}{ML^2 + J_\phi} \dot{x}_4 + \frac{MgL \sin x_1}{ML^2 + J_\phi}. \quad (25)$$

Tomando la variable  $\dot{x}_4$ , que representa la aceleración de las ruedas, como la dinámica de control del péndulo invertido y denotando a esta variable como la nueva señal de control  $v$  se tiene que:

$$\dot{x}_2 = \frac{-MLR \cos x_1}{ML^2 + J_\phi} v + \frac{MgL \sin x_1}{ML^2 + J_\phi}. \quad (26)$$

Por lo tanto el nuevo sistema de segundo orden es:

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (27)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{-MLR \cos x_1}{ML^2 + J_\phi} v + \frac{MgL \sin x_1}{ML^2 + J_\phi}.$$

Se va a realizar el control del péndulo invertido alrededor de la posición vertical por lo que el punto de operación del sistema es:

$$(x_1^* = 0, x_2^* = 0, U = 0). \quad (28)$$

Linealizando el sistema alrededor del punto de operación (28) y escribiendo el sistema en espacio de estados obtenemos:

$$\dot{x}_\delta = A_\delta x_\delta + B_\delta u, \quad (29)$$

$$y_\delta = C x_\delta,$$

donde:

$$x_\delta = [\phi, \dot{\phi}]^T = [x_{1\delta}, x_{2\delta}]^T.$$

El sensor gyro de Hitechnic®, mide la velocidad angular del cuerpo del péndulo,  $x_{2\delta}$ . El ángulo del cuerpo,  $x_{1\delta}$ , se obtiene integrando numéricamente el valor de  $x_{2\delta}$ . Por lo tanto, se puede escoger la variable  $x_{1\delta}$  como salida del sistema. De allí que:

$$C = [1 \ 0].$$

Desarrollando el sistema mostrado en (29), se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{1\delta} \\ \dot{x}_{2\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ A_\delta(2,1) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1\delta} \\ x_{2\delta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ B_\delta(2) \end{bmatrix} u_\delta, \quad (30)$$

$$y = [1 \ 0] x_\delta,$$

donde:

$$A_\delta(2,1) = \frac{MgL}{ML^2 + J_\phi},$$

$$B_\delta(2) = \frac{-MLR}{ML^2 + J_\phi}.$$

Se realiza la discretización del sistema utilizando el método de discretización exacta. La estructura del sistema discretizado en espacio de estados, que resulta al aplicar este método de discretización, se muestra a continuación

$$x((k+1)T_0) = \Phi x(kT_0) + \Gamma u(kT_0), \quad (31)$$

$$y(kT_0) = C x(kT_0),$$

donde:

$$\Phi = e^{AT_0}, \quad (32)$$

$$\Gamma = \int_0^{T_0} e^{A\rho} B d\rho. \quad (33)$$

El sistema discretizado en espacio de estados es:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\alpha & \frac{1}{2\sqrt{MgL}}\beta \\ \frac{\sqrt{MgL}}{2}\beta & \frac{1}{2}\alpha \end{bmatrix} \quad (34)$$

Así, la matriz  $\Gamma$  es:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \frac{-R}{2g}(\alpha-2) \\ \left(-\sqrt{\frac{ML}{g(ML^2+J_\phi)}}\frac{R}{2}\right)\beta \end{bmatrix}, \quad (35)$$

donde:

$$\alpha = \left( e^{\sqrt{\frac{MgL}{ML^2+J_\phi}}T_0} + e^{-\sqrt{\frac{MgL}{ML^2+J_\phi}}T_0} \right),$$

$$\beta = \left( e^{\sqrt{\frac{MgL}{ML^2+J_\phi}}T_0} - e^{-\sqrt{\frac{MgL}{ML^2+J_\phi}}T_0} \right),$$

y la matriz  $C$  es:

$$C = [1 \quad 0]. \quad (36)$$

Sustituyendo los valores numéricos de los parámetros de la Tabla I y tomando el período de muestreo  $T_0 = 0,1s$  se discretiza el sistema.

La ley de control se programó utilizando el lenguaje RobotC, desarrollado por la Academia de Robótica de la Universidad de Carnegie Mellon (ver [13]). Este lenguaje cuenta con aritmética de punto flotante, lo que resulta en una implementación más precisa de la ley de control diseñada.

Se tiene entonces que el sistema discretizado en espacio de estados al cual se le realizará el diseño del controlador es:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,440 & 0,114 \\ 9,395 & 1,440 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,0038 \\ -0,0483 \end{bmatrix} u(k), \quad (37)$$

$$y(k) = [1 \quad 0]x(k).$$

#### IV. DISEÑO DEL CONTROLADOR PID

Del análisis de la representación en espacio de estados del sistema continuo se pueden obtener conclusiones importantes sobre la influencia de algunos parámetros físicos en la controlabilidad del sistema.

A continuación se muestra la matriz de controlabilidad del

sistema continuo de segundo orden:

$$\Psi = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-MRL}{ML^2+J_\phi} \\ \frac{-MRL}{ML^2+J_\phi} & 0 \end{bmatrix}, \quad (38)$$

donde el determinante de la matriz de controlabilidad es:

$$Det(\Psi) = -\left(\frac{MRL}{ML^2+J_\phi}\right)^2, \quad (39)$$

Si se desprecia el parámetro  $J_\phi$  (momento de inercia del cuerpo del péndulo), el cual por lo general es muy pequeño en comparación con la masa  $M$  y la longitud del centro de masa del cuerpo del péndulo  $L$ , se obtiene que:

$$Det(\Psi) = -\left(\frac{R}{L}\right)^2. \quad (40)$$

Al examinar esta expresión del determinante de la matriz de controlabilidad del sistema continuo, se observa que al aumentar la longitud hasta el centro de masa del cuerpo del péndulo  $L$ , el determinante disminuirá. Acercándose al valor cero, lo que indica que el sistema tenderá a ser menos controlable.

Por el contrario, si se aumenta el radio de las ruedas  $R$ , el determinante tenderá a valores más alejados de cero, lográndose una mayor controlabilidad sobre el péndulo invertido sobre dos ruedas.

A continuación se realiza el diseño del controlador PID para el sistema continuo y para el sistema discretizado.

Aplicando la fórmula:

$$G(s) = C_\delta(SI - A_\delta)^{-1}B_\delta, \quad (41)$$

al sistema en espacio de estados mostrado en (30), se obtiene la siguiente función de transferencia del sistema continuo:

$$G(s) = \frac{-0,335562}{s^2 - 82,2128}. \quad (42)$$

La función de transferencia generalizada de un controlador PID es:

$$G_c(s) = kp + \frac{ki}{s} + kd s. \quad (43)$$

donde  $kp$  es la ganancia proporcional,  $ki$  es la ganancia integral y  $kd$  es la ganancia derivativa.

Para calcular los parámetros del controlador  $G_c(s)$  mediante asignación de polos, se tienen en cuenta los siguientes criterios para la escogencia de los polos deseados del sistema en lazo cerrado, con el fin de lograr el mejor desempeño del sistema controlado.

- Rapidez en estabilizar los estados: dada la naturaleza del péndulo invertido sobre dos ruedas, se necesita que el péndulo se estabilice en la posición vertical en el menor tiempo posible.

- Menor número de oscilaciones posible: si ocurren muchas oscilaciones al tratar de estabilizar el péndulo es posible que no se logre alcanzar el objetivo de control y el sistema caiga en la inestabilidad.

- Limitaciones en la señal de control: en vista de que se va a utilizar la señal de control diseñada para los motores del Lego Mindstorms NXT®, la simulación tiene que mostrar que esta señal se encuentra dentro del rango de operación de los motores. Los motores del NXT tienen un rango de operación desde -9V a +9V.

Se lograron obtener los siguientes polos que cumplen de manera adecuada con las especificaciones señaladas anteriormente:

$$s_{1,2} = -3,54 \pm 3,536j \quad (44)$$

De la escogencia de estos polos continuos resultan los siguientes parámetros:

$$\zeta = 0,707, \quad (45)$$

$$\omega_n = 5 \text{ rad/s}. \quad (46)$$

Con estos polos continuos deseados se obtienen las siguientes especificaciones para el tiempo de asentamiento ( $T_s$ ) y el sobredisparo máximo ( $SD$ ):

$$T_s = 1,41 \text{ s}, \quad (47)$$

$$SD \leq 0,05. \quad (48)$$

La función de transferencia del sistema en lazo cerrado, con realimentación negativa unitaria, utilizando el controlador  $G_c(s)$  se muestra a continuación:

$$Glc(s) = \frac{Gc(s)G(s)}{1 + Gc(s)G(s)}. \quad (49)$$

Del denominador de la función de transferencia se obtiene el siguiente polinomio característico mostrado a continuación, el cual incluye las ganancias del controlador  $kp$ ,  $ki$  y  $kd$ .

$$Pc(s) = s^3 - 0,336kd s^2 - (0,336kp + 81,213)s - 0,336ki. \quad (50)$$

A partir de los polos deseados (44), se construye el siguiente polinomio deseado:

$$Pd(s) = [s + 3,535 - 3,536j][s + 3,535 + 3,536j][s + 20]. \quad (51)$$

Igualando los polinomios (50) y (51) se obtienen las siguientes ganancias para el controlador PID:

$$kp = -740,884, \quad (52)$$

$$ki = -80,6705, \quad (53)$$

$$kd = -1490,04. \quad (54)$$

La ley de control PID en tiempo continuo queda descrita como:

$$\frac{d\xi}{dt} = ki e(t), \quad (55)$$

$$u(t) = kp e(t) + \xi(t) + kd \frac{de(t)}{dt}. \quad (56)$$

Para obtener la ley de control PID del sistema discretizado, realizando el diseño en tiempo discreto es necesario calcular la función de transferencia discretizada del sistema. Entonces a partir de la representación en espacio de estados del sistema discretizado mostrado en (37), se obtiene la siguiente función de transferencia:

$$G_d(z) = C(ZI - \Phi)^{-1}\Gamma, \quad (57)$$

donde  $\Phi$ ,  $\Gamma$  y  $C$  son las mostradas en (34), (35) y (36) respectivamente.

$$G_d(z) = \frac{8,674 \times 10^{-19} - 0,0038z}{1 - 2,88z + z^2} \quad (58)$$

Para el diseño del controlador PID en tiempo discreto por asignación de polos, utilizamos la siguiente estructura del PID discreto con un retardo incluido, debido a que se busca que el sistema de ecuaciones resultante de la igualación de polinomios tenga solución única.

El controlador PID discreto con retardo se muestra a continuación:

$$G_{cd}(z) = \frac{u(z)}{e(z)} = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}}{(1 - z^{-1})(1 + \gamma z^{-1})} \quad (59)$$

Los polos discretos deseados correspondientes a los polos continuos deseados son:

$$z_{1,2} = e^{s_{1,2} T_0} = 0,659 \pm 0,243j \quad (60)$$

La función de transferencia del sistema discreto en lazo cerrado, con realimentación negativa unitaria, utilizando el controlador  $G_c(z)$  se muestra a continuación:

$$G_{lcd}(z) = \frac{G_{cd}(z)G_d(z)}{1 + G_{cd}(z)G_d(z)} \quad (61)$$

Del denominador de la función de transferencia (61) se obtiene el siguiente polinomio característico mostrado a continuación:

$$Pc(z) = z^4 + (\gamma - 0,00384q_0 - 3,88)z^3 + (8,67 \times 10^{-19}q_0 - 0,00385q_1 - 3,88\gamma + 3,88)z^2 + (8,674 \times 10^{-19}q_1 - 0,00384q_2 + 3,88\gamma - 1)z + 8,674 \times 10^{-19}q_2 - \gamma. \quad (62)$$

A partir de los polos discretos deseados (60), se construye el siguiente polinomio deseado:

$$Pd(z) = (z - 0,6588 - 0,2432j)(z - 0,6588 + 0,2432j)(z - 0,13534)(z - 0,6). \quad (63)$$

Igualando los polinomios (62) y (63) se obtienen las siguientes ganancias para el controlador PID discreto con retardo:

$$q_0 = -486,915, \quad (64)$$

$$q_1 = 649,912, \quad (65)$$

$$q_2 = -178,832 \quad (66)$$

$$\gamma = -0,040042. \quad (67)$$

Despejando  $u(z)$  y  $e(z)$  de (59), y aplicando la transformada inversa  $Z$ , se obtiene la siguiente ley de control discreta:

$$u(k) = -u(k-1)(\gamma-1) + \gamma u(k-2) + q_0 e(k) + q_1 e(k-1) + q_2 e(k-2) \quad (68)$$

La ley de control PID discreta (68) es la que se implementó en el bloque programable NXT.

### V. SIMULACIONES

En las Figuras 4 a 6 se muestran las simulaciones del sistema continuo y del sistema discretizado controlados por el PID continuo y discreto.

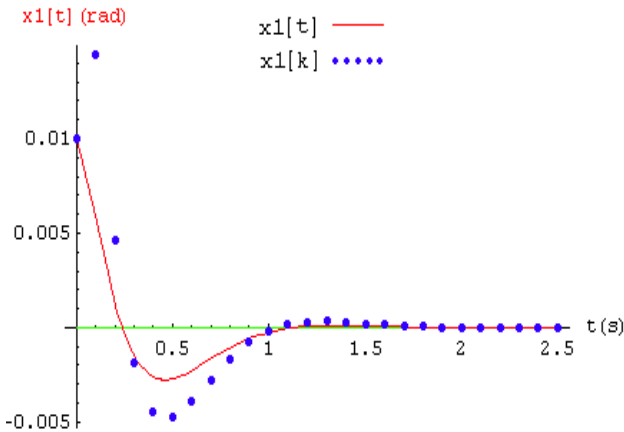


FIG. 4. Control PID para la dinámica de posición continua y discreta.  $x_1(0) = 0,6$  grados.

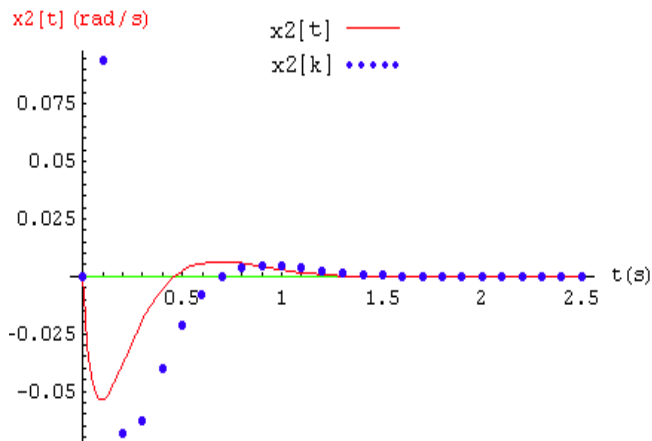


FIG. 5. Control PID para la dinámica de velocidad continua y discreta.  $x_1(0) = 0,6$  grados.

La Figura 4, muestra que el controlador PID logra que la posición del péndulo alcance el valor deseado de 0 grados que equivale a 0 radianes, en el tiempo de asentamiento especificado, a partir de una posición inicial de 0,6 grados, lo que equivale aproximadamente a 0,01 radianes.

Adicionalmente la respuesta presenta una oscilación suave antes de estabilizarse, logrando los objetivos de diseño que se buscaban alcanzar.

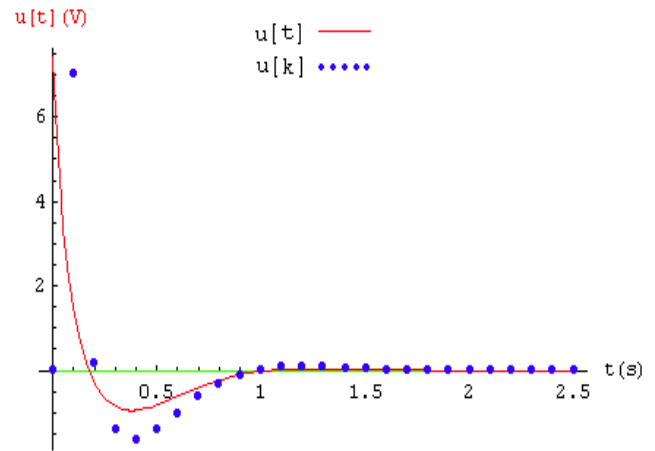


FIG. 6. Señal de control PID continua y discreta  $x_1(0) = 0,6$  grados.

En la Figura 6, se observa que la señal de control se encuentra dentro del rango de operación de los motores del NXT,  $u \in [-9,9]$  V.

Por su parte, en la Figura 7 se muestra una pequeña secuencia del péndulo invertido construido (sistema no lineal), bajo los efectos de la ley de control diseñada (control lineal) en (68) e implementada en el NXT (control digital).



FIG. 7. Péndulo invertido funcionando con el controlador diseñado en (68).

### VI. CONCLUSIONES

En la implementación práctica del controlador PID discreto fue necesario el ajuste de uno de los parámetros del controlador, específicamente la ganancia  $q_0$  en un porcentaje del 3% para lograr una mejor respuesta del sistema.

La ley de control PID discreta logra estabilizar el péndulo invertido sobre dos ruedas en la posición vertical, y adicionalmente soporta ligeras perturbaciones alrededor de la posición vertical.

Cabe destacar que a pesar de que se trabajó con un modelo reducido, en el cual las únicas variables que se toman en cuenta son la velocidad angular del cuerpo y el ángulo de inclinación de éste, el péndulo invertido sobre dos ruedas logra mantener el ángulo de inclinación del cuerpo del péndulo, estabilizado alrededor de 0 grados. Es decir, el cuerpo del péndulo estabilizado en la posición vertical, sin embargo, el péndulo invertido sobre dos ruedas no se queda en una

posición fija en el eje horizontal, este tiende a alejarse de manera constante de su posición inicial en el eje horizontal.

Este comportamiento se debe a que no se controla la posición en el eje horizontal del péndulo invertido sobre dos ruedas, ya que no se tomaron en cuenta las variables  $\theta$  y  $\dot{\theta}$  que son respectivamente el ángulo de rotación de las ruedas y la velocidad angular de las mismas, las cuales representan una medida del desplazamiento longitudinal del sistema.

La plataforma Lego Mindstorms NXT® ofrece la posibilidad de estudiar sistemas de control a pequeña escala, ya que cuenta con todos los elementos que forman parte de éstos como lo son: sensores, actuadores y un microcontrolador en el cual se pueden programar estrategias de control.

#### REFERENCIAS

- [1] J. Aracil and F. Gordillo. “**El Péndulo Invertido. Un Desafío para el Control no Lineal**”. Revista Interamericana de Automática e Informática Industrial, Vol. 2, pp. 8-19, 2005.
- [2] K. Ogata. “**Sistemas de Control en Tiempo Discreto**”. Ed. Prentice Hall Hispanoamericana S.A., 1996, pp. 625-626.
- [3] K. Furuta, H. Nishihara and S. Mori. “**Control of Unstable Mechanical Systems: Control of Pendulum**”. International Journal of Control, Vol. 23, pp. 673-692, 1976.
- [4] F. Grasser, A. D’Arrigo, S. Colombi and A. Rufer. “**Joe: A Mobile, Inverted Pendulum**”. Swiss Federal Institute of Technology, 2002. [http://leiwwww.epfl.ch/publications/grasser\\_darrigo\\_colombi\\_rufer\\_mic\\_01.pdf](http://leiwwww.epfl.ch/publications/grasser_darrigo_colombi_rufer_mic_01.pdf).
- [5] B. Sherman. “**Balibot, an Inverted Pendulum Robot**”, 2003. Disponible en <http://home.comcast.net/~botronics/balibot.html>.
- [6] D. P. Anderson. “**Nbot Balancing Robot**”, 2003. Disponible en <http://geology.heroy.smu.edu/~dpa-www/robo/nbot>.
- [7] R. Ooi. “**Balancing a Two-Wheeled Autonomous Robot**”. University of Western Australia, 2003. Disponible en <http://robotics.ee.uwa.edu.au/theses/2003-Balance-Ooi.pdf>.
- [8] S. Hassenplug. “**Legway**”, 2002. Disponible en <http://www.teamhassenplug.org/robots/legway>.
- [9] P. Hurbain’s. “**Nxtway**”, 2007. <http://www.philohome.com/nxtway/>.
- [10] R. Watanabe. “**Motion Control of Nxtway Lego Segway**”. Universidad de Waseda, Japón, 2007. [http://web.mac.com/ryo\\_watanabe/](http://web.mac.com/ryo_watanabe/).
- [11] Y. Yamamoto. “**Nxtway-gs (Self-balancing Two-wheeled Robot) controller design**”, 2008. Disponible en <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/19147>.
- [12] Lego Mindstorms NXT®. <http://www.mindstorms.lego.com>. Septiembre, 2009.
- [13] Hitechnic®. <http://www.hitechnic.com>. Septiembre, 2009.
- [14] K. Ogata. “**Dinámica de Sistemas**”. Ed. Prentice Hall Hispanoamericana, pp. 551-555, 1987.
- [15] A. Patete. “**Desarrollo de un Mímico de un Sistema de Control en Mathematica®**”. Proyecto de grado, Facultad de Ingeniería, ULA, Mérida, 2002.